Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Tisdagen den 10 januari 2017 klockan 14.00-17.00 i hörsalar på hörsalsvägen.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15.00 och 16.00.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

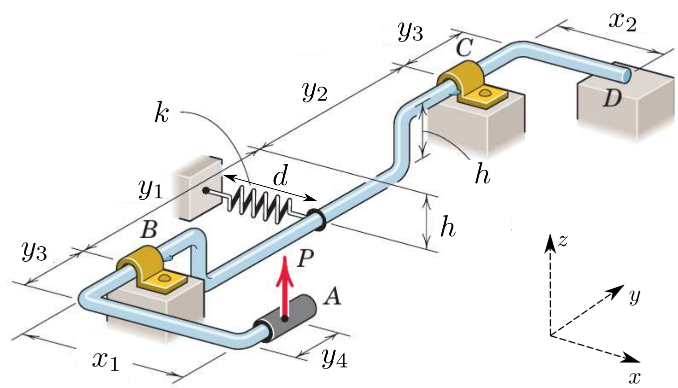
- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst fyra poäng och 4-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5.

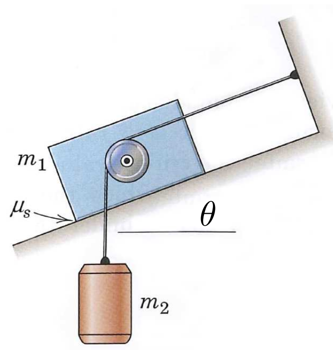
Lösningar och rättningsgranskning: Lösningar publiceras på kurshemsidan efter tentamen och rättningsgranskning är 8 februari kl 11.45-12.15 i GD-salen.

Uppgifter

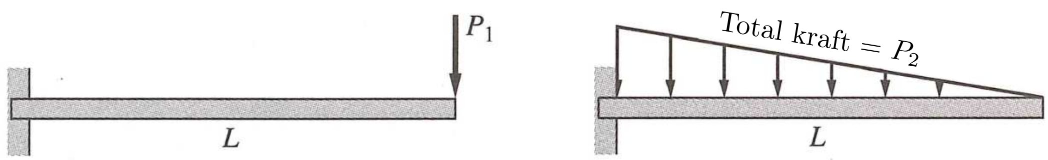
1. Fjädern i uppställningen har fjäderkonstant k och osträckt längd s. Beräkna den minsta kraft P som behövs för att precis påbörja en rotation och beräkna krafterna på axeln vid B för detta gränsfall (fästena vid B och C kan inte ta upp krafter i y-led). Försumma axelns massa och friktionen vid B och C då axeln vrids.



2. Bestäm det intervall för massan m_2 inom vilket systemet är i jämvikt. Den statiska friktionskoefficienten mellan blocket och underlaget är μ_s. Försumma friktionen i trissan och antag att $0 < \theta < \pi/2$ samt att $0 < \mu_s < \frac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.



3. Om en (homogen och masslös) balk belastas enligt figur (a) så brister den för en viss kraft $P_1^{\max}$ eftersom böjmomentet blir för stort i någon punkt. Hur stor kan den totala kraften P_2 högst vara innan balken brister av samma anledning då den belastas enligt figur (b)?



(a) (b)

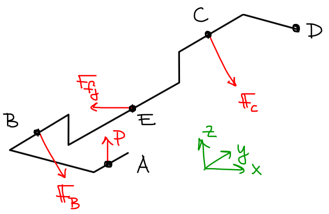
Lycka till!

Lösningsförslag på tentamen 2017-01-10
Mekanik 1 del 1

1. **Givet**: Längderna $x_1,\dots,x_4, y_1,\dots,y_4, d, h$ enligt figur i tesen, fjäderkonstanten k och fjäderns osträckta längd s. (Axelns massa och friktion i B och C försummas)

Sökt: Den minsta kraft P som behövs för att precis påböja rotation samt kraftvektorn $\mathbb{F}_B$ på axeln i B i detta gränsfall.

Lösning: Gränsfallet fås då normalkraften i D är noll.
Frilägg axeln



Kraften från fjädern med utsträckning $\Delta \ell = d - s$ är:

$$F_{fj} = k\Delta\ell = k(d-s)$$

Då B och C ej tar upp krafter i y-led har vi att:

$$\mathbb{F}_B = F_{Bx}\hat{\imath} + F_{Bz}\hat{k} \qquad \mathbb{F}_C = F_{Cx}\hat{\imath} + F_{Cz}\hat{k}$$

Momentjämvikt (i vektorform) kring C:

$$\mathbb{r}_{CE}\times(-F_{fj}\hat{\imath}) + \mathbb{r}_{CB}\times\mathbb{F}_B + \mathbb{r}_{CA}\times P\hat{k} = 0 \quad \text{där}$$

ortsvektor från C till E

$$\mathbb{r}_{CE} = -y_2\hat{\jmath} - h\hat{k}, \quad \mathbb{r}_{CB} = -(y_1+y_2)\hat{\jmath}$$

$$\mathbb{r}_{CA} = x_1\hat{\imath} - (y_1+y_2+y_3-y_4)\hat{\jmath}$$

Vi väljer C för att inte behöva ta med $\mathbb{F}_C$.

Vi har att:

$$\mathbb{r}_{CE}\times(-F_{fj}\hat{\imath}) = +F_{fj}(y_2\hat{\jmath}\times\hat{\imath} + h\hat{k}\times\hat{\imath}) = k(d-s)(-y_2\hat{k} + h\hat{\jmath})$$

$$\mathbb{r}_{CB}\times\mathbb{F}_B = -(y_1+y_2)\hat{\jmath}\times(F_{Bx}\hat{\imath} + F_{Bz}\hat{k}) = -(y_1+y_2)(-F_{Bx}\hat{k} + F_{Bz}\hat{\imath})$$

$$\mathbb{r}_{CA}\times P\hat{k} = -x_1P\hat{\jmath} - (y_1+y_2+y_3-y_4)P\hat{\imath}$$

Vi samlar ihop de olika komponenterna var för sig och får ekvationerna

$$\hat{\jmath}: \quad k(d-s)h - x_1P = 0 \quad \Rightarrow \quad P = k\frac{h(d-s)}{x_1}$$

$$\hat{k}: \quad -y_2k(d-s) + (y_1+y_2)F_{Bx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Bx} = k\frac{y_2(d-s)}{y_1+y_2}$$

$$\hat{\imath}: \quad -(y_1+y_2)F_{Bz} - (y_1+y_2+y_3-y_4)P = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_{Bz} = -P\frac{y_1+y_2+y_3-y_4}{y_1+y_2} = -k\frac{h(d-s)}{x_1}\left(1+\frac{y_3-y_4}{y_1+y_2}\right)$$

Svar:
$$P = k\frac{h(d-s)}{x_1} \qquad \mathbb{F}_B = k\frac{y_2(d-s)}{y_1+y_2}\hat{\imath} - k\frac{h(d-s)}{x_1}\left(1+\frac{y_3-y_4}{y_1+y_2}\right)\hat{k}$$

Kontroller:

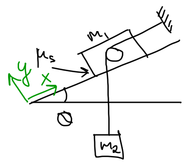
Dimensioner: $[P] = N/m \cdot \frac{m^2}{m} = N \qquad [F_{Bx}] = N/m \cdot \frac{m^2}{m} = N \qquad [F_{Bz}] = N/m\cdot\frac{m^2}{m}\cdot 1 = N$ OK!

$k = 0 \Rightarrow P = F_{Bx} = F_{Bz} = 0$ OK!

$d > s \Rightarrow P > 0$ och $F_{Bx} > 0$ OK!

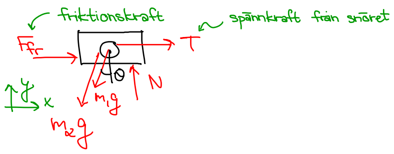
2. Givet: massan m_1, vinkeln θ och μ_s mot underlaget
(försumma friktion i trissan) Antag $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ samt $0<\mu_s<\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

Sökt: Intervallet för massan m_2 för vilket systemet är i vila



Lösning:

Frilägg m_1 med trissan i det utritade koordinatsystemet.



För att trissan inte ska börja snurra krävs att

$$T = m_2 g$$

För friktionskraften gäller att

$$|F_{fr}| \le \mu_s N \quad , \quad \text{dvs} \quad -\mu_s N \le F_{fr} \le \mu_s N \qquad (*)$$

OBS: Om $m_2 \gg m_1$ kan det ske att m_1-blocket glider uppför rampen varför vi måste ha med båda tecknen för F_{fr}.

Kraftjämvikt ger:

$$\begin{aligned} x:&\quad F_{fr} + T - (m_1+m_2)g\sin\theta = 0 \\ y:&\quad N-(m_1+m_2)g\cos\theta = 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F_{fr} = (m_1+m_2)g\sin\theta - m_2 g \\ N = (m_1+m_2)g\cos\theta \end{cases}$$

Insättning i $(*)$ ger

$$-\mu_s(m_1+m_2)g\cos\theta \le (m_1+m_2)g\sin\theta - m_2 g \quad \text{och} \quad (m_1+m_2)g\sin\theta - m_2 g \le \mu_s(m_1+m_2)g\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad -m_1(\mu_s\cos\theta+\sin\theta) \le m_2\underline{(\sin\theta+\mu_s\cos\theta-1)} \quad \text{och} \quad m_2\underline{(\sin\theta-\mu_s\cos\theta-1)} \le m_1(\mu_s\cos\theta-\sin\theta)$$

Enligt antagandet:

$$0<\theta<\frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad 0<\mu_s<\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \implies 0<\mu_s\cos\theta<1-\sin\theta \implies \begin{cases} \mu_s\cos\theta-(1-\sin\theta)<0 \\ -\mu_s\cos\theta-(1-\sin\theta)<0 \end{cases}$$

Dvs, de <u>understrukna</u> faktorerna ovan är negativa

Således byts olikhetstecknen vid division till:

$$-m_1\frac{\mu_s\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta+\mu_s\cos\theta-1} \ge m_2 \qquad \text{och} \qquad m_2 \ge m_1\frac{\mu_s\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta-\mu_s\cos\theta-1}$$

Med positiva nämnare får vi då

Svar: $$m_1\frac{\sin\theta-\mu_s\cos\theta}{1-\sin\theta+\mu_s\cos\theta} \le m_2 \le m_1\frac{\sin\theta+\mu_s\cos\theta}{1-\sin\theta-\mu_s\cos\theta}$$

För $\mu_s>\tan\theta$ blir $\sin\theta-\mu_s\cos\theta$ negativt varför man då istället bör använda noll som nedre gräns för m_2 ty massan måste vara positiv.

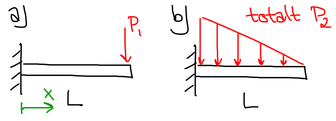
Kontroller:

Dim. OK!

$$\mu_s = 0 \implies m_2 = m_1\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta} \quad \leftarrow \text{ej intervall} \quad \text{OK!}$$

3\. Givet: Längden L, kraften P_1^{max} vid bristning i a) samt kraftfördelningen i b)

Sökt: Maximala totala kraften P_2^{max} innan bristning i b)

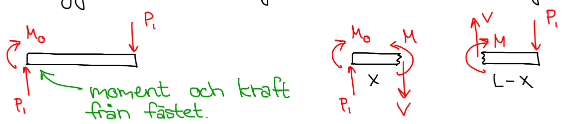


identiska homogena balkar

Lösning:

Inför koordinatsystem enligt figur a).

Frilägg balken i figur a) och bestäm böjmomentet M i positionen x.



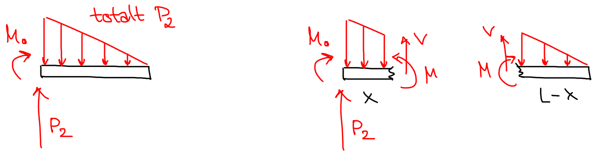
Från den högra biten fås, genom momentjämvikt, att

$M(x) = -P_1(L-x)$

Det maximala absoluta böjmomentet fås för $x=0$ (vilket man annars enkelt kan argumentera för direkt) och vid bristning fås då böjmomentet

$M_{brist} = -P_1^{max} L$

Vi frilägger nu balken i figur b) och bestämmer böjmomentet M i pos. x



Kraftfördelningen w är linjärt avtagande samt noll i $x=L$ och har då formen

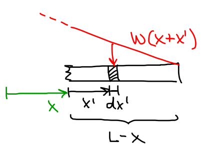
$w(x) = k(L-x)$

där k bestäms av att den totala kraften är P_2:

$P_2 = \int_0^L w(x)dx = \frac{1}{2} L \cdot kL$ (area av tringel med bas L och höjd kL)

$\Rightarrow k = \frac{2P_2}{L^2} \qquad w(x) = \frac{2P_2}{L^2}(L-x)$

Vi vill nu beräkna böjmomentet genom att titta på den högra biten. Momentet i x från kraftfördelningen fås genom att integrera bidragen från små bitar enligt figuren nedan. Vid momentjämvikt ska detta tillsammans med böjmomentet summera till noll varför:



$$-M(x) = \int_0^{L-x} x' \cdot w(x+x')\,dx' = \frac{2P_2}{L^2}\int_0^{L-x} x'(L-x-x')\,dx' = \left\{\text{Partiell integr.}\right\}$$

$$= \frac{\cancel{2}P_2}{L^2}\left(\cancel{\left[\frac{1}{2}x'^2(L-x-x')\right]_0^{L-x}} - \int_0^{L-x} -\frac{1}{\cancel{2}}x'^2\,dx'\right) = \frac{P_2}{L^2}\int_0^{L-x} x'^2 dx' = \frac{P_2}{3L^2}(L-x)^3$$

Eftersom $|M(x)|$ är en avtagande funktion på intervallet $0<x<L$ så är böjmomentet som störst för $x=0$ (vilket man också kan argumentera direkt för)

Vi får då vid bristning att

$$-P_1^{max} L = M_{brist} = M(x=0) = -\frac{P_2}{L^2}L^3 = -\frac{1}{3}P_2 L \Rightarrow P_2 = 3P_1^{max}$$

Svar: $P_2^{max} = 3P_1^{max}$

Kontroller: Dim. OK! $\qquad P_2^{max} > P_1^{max}$ OK!